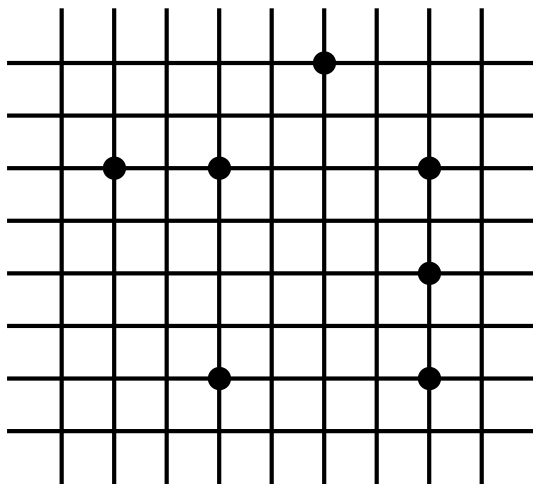


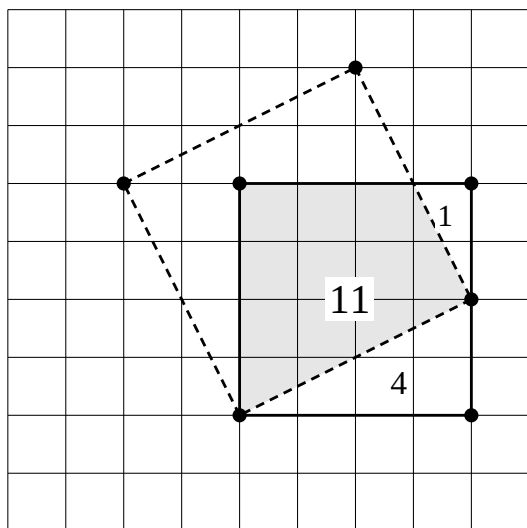
Vzorová řešení a komentáře Pikomatu Junior k 5. sérii příkladů

Příklad č. 1

Na obrázku jsou znázorněny všechny vrcholy dvou čtverců. Vypočítej obsah jejich společné části. Strana čtverečku přitom měří 1 cm.



Řešení: Nejdřív si nakreslíme oba čtverce. Pak se můžeme vydat různými směry při řešení. Třeba si překrytou plochu rozdělíme na část s celými čtverečky a několik trojúhelníkových částí a vzniklé plochy sečteme. My popíšeme způsob, kde od plochy jednoho celého čtverce odečteme plochy, které nejsou uvnitř druhého čtverce. Vždy nezapomeneme postup dobře popsat a na závěr zapsat odpověď.



$$16 - 5 = 11$$

Vezmeme si čtverec s plnou čarou. Má stranu dlouhou 4 políčka, takže jeho obsah je $4 \cdot 4 = 16$. Společná část obou čtverců je skoro celý tento čtverec, jen z něj musíme odečíst dva trojúhelníky, které do druhého čtverce nepatří.

Větší trojúhelník má obsah $(4 \cdot 2) : 2 = 4$. Menší trojúhelník má obsah $(2 \cdot 1) : 2 = 1$. Dohromady tedy odečítáme $4 + 1 = 5$. Obsah společné části obou čtverců je proto $16 - 5 = 11 \text{ cm}^2$.

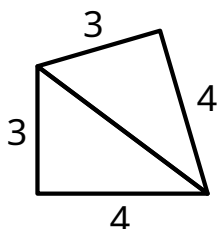
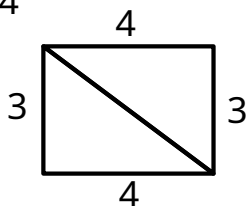
Příklad č. 2

Terka dostala čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky se stranami délek 3 cm, 4 cm a 5 cm. Z těchto trojúhelníků (ne nutně ze všech čtyř) zkoušela skládat nové útvary. Postupně se jí podařilo složit čtyřúhelníky s obvodem 14 cm, 18 cm, 22 cm a 26 cm, a to pokaždé dvěma různými způsoby (tj. tak, že žádné dva čtyřúhelníky nebyly shodné). Nakresli ke každému obvodu alespoň jeden možný útvar.

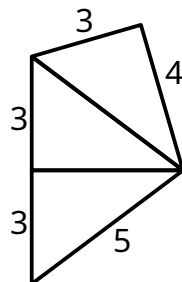
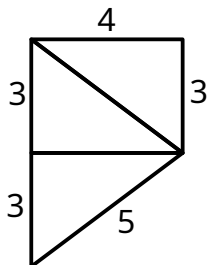
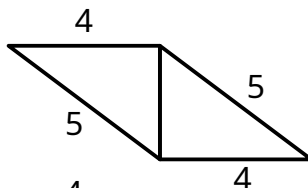
Řešení: Na obrázcích jsou ukázané možnosti řešení. Pro jed-

notlivé varianty obvodu čtyřúhelníku jsem našla od dvou do čtyř řešení. Je možné, že existují i nějaké jiné možnosti, schválně jestli někdo nalezne další :) Jako jiné řešení se nepočítá, když je čtyřúhelník jen otočený.

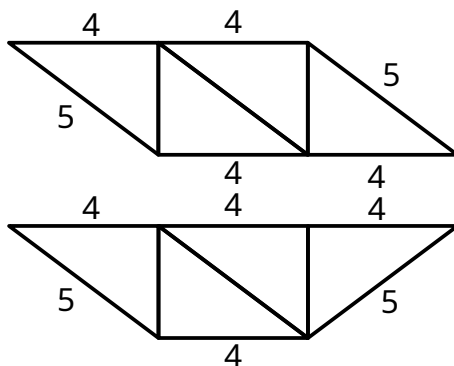
14



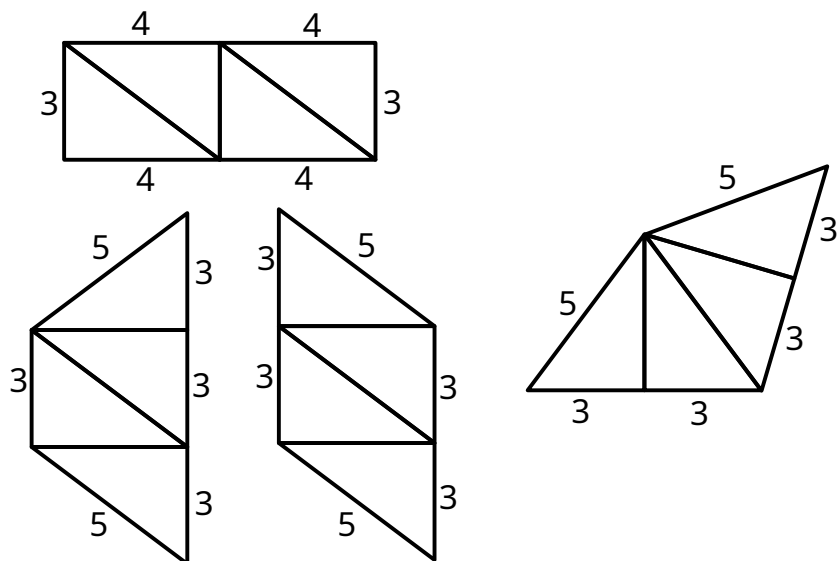
18



26



22

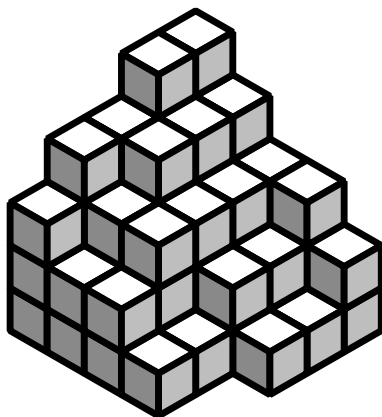


Příklad č. 3

Původně zde stála krychle složená ze 125 shodných kostiček. Postupně z ní však kostiček ubývalo, až se dostala do stavu znázorněného na obrázku. Celý tento útvar byl poté přestříknut ochranou barvou (a to i zespodu). Nyní se krychle rozsypala na dílčí kostičky.

a) Kolik kostiček má alespoň jednu stěnu nabarvenou a kolik je celkem nabarvených stěn?

b) Je možné kostičky útvaru přeskládat do krychle o straně 4 tak, aby žádná část povrchu nebyla nabarvená?



Řešení: V podúloze a) lze počet obarvených kostiček získat nejlépe tím, že při sčítání budeme postupovat systematicky, tedy například po řadách, nebo stranách, a ty pak sečteme dohromady. Nabarvených je tedy 58 kostiček. Poté velmi efektivní je si všimnout, že při pohledu na dvě protilehlé stěny je počet nabarvených stěn vždy stejný, ten vždy sečteme, a vyjde nám $(17 \cdot 2) + (21 \cdot 2) + (23 \cdot 2) = 122$.

V podúloze b) to možné je, neboť na vytvoření krychle potřebujeme 8 kostek alespoň ze tří stran neobarvených (na rohy), 24 alespoň ze dvou stran neobarvených (na hrany), 24 kostek neobarvených alespoň z jedné strany (na stěny) a na zbylých osmi nezáleží, ty jsou vevnitř. Máme k dispozici 65 kostek (o jednu víc než potřebujeme, ale to nevadí) z toho jen 8 je obarvených z více než tří stran, ty můžeme dát dovnitř, a zbylé tedy dokážeme už přeskládat do krychle 4×4 .

Příklad č. 4:

Na zlomky narážíme v matematice velmi často, takže si o nich něco povíme. Přirozeně se s nimi můžeme setkat třeba při spravedlivém rozdělování věcí mezi lidi. Představme si, že máme třeba

15 jablek a rozdělujeme je mezi 3 lidi. Zjistíme, že když každý dostane 5 jablek, všichni budou mít stejně a zároveň na takové rozdělení skutečně využijeme $5 \times 3 = 15$ jablek. Tímto jsme vlastně odpověděli na otázku, kolik je $15 : 3$, protože rozdělujeme 15 jablek mezi 3 lidi.

Co kdyby nás ale zajímalo, kolik je $1 : 2$? Mohlo by nás třeba napadnout, že 0 je málo, protože $0 \cdot 2 = 0$ (to je menší než 1), a 1 je moc, protože $1 \cdot 2 = 2$ (a to je zase větší než 1). Znamená to, že v takovém případě nemá dělení řešení? Zkusme se nad tím zamyslet. Když máme 1 jablko a chtěli bychom je rozdělit mezi dva lidi tak, aby to bylo spravedlivé, můžeme situaci prakticky vyřešit tak, že jablko vezmeme, rozpůlíme a každý dostane půlku. Oba lidé budou mít stejně, což byl cíl našeho dělení. Podobně k tomu přistoupíme i v matematice. Řekneme, že dělení $1 : 2$ má výsledek, ale není celočíselný, což odpovídá tomu, že jsme nemohli jablko rozdělit tak, aby každý dostal nerozdělené jablko. V matematice bychom řekli, že výsledek našeho dělení je $\frac{1}{2}$, což přečteme jako „jedna polovina“. Toto číslo nám tedy určuje, kolik jablek dostane každý ze dvou lidí, pokud jsme mezi ně rozdělili jedno jablko a oba mají stejně.

Podívejme se na to, jak takový zlomek vypadá. Je složen z čísla nahoře, čísla dole a čáry, která tato dvě čísla odděluje. Číslu nahoře říkáme čitatel. Ten udává, kolik věcí (v našem případě jablek) rozdělujeme. Číslu dole říkáme jmenovatel. Ten nám udává, mezi kolik lidí rozdělujeme. A té čáře říkáme zlomková čára. Je tam proto, aby bylo všem jasné, že jsme napsali zlomek, a ne jen dvě čísla nad sebou.

Když jsme zkoumali výsledek $15 : 3$, hledali jsme číslo, které po vynásobení třemi dává 15. Stejně tak když se zajímáme o výsledek $1 : 2$ a definujeme si jej jako $\frac{1}{2}$, znamená to, že $\frac{1}{2}$ má tu skvělou vlastnost, že když ji vynásobíme dvěma, dostaneme 1. Neboli platí,

že $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Nakonec můžeme zkusit udělat nějaké odhady. Už víme, že 0 je pro výsledek $1 : 2$ málo a 1 je zase moc. A když $\frac{1}{2}$ je tak akorát, znamená to, že $\frac{1}{2} > 0$ a $\frac{1}{2} < 1$ (doplň znaménka nerovnosti).

Zkusme si to celé ještě na jednom příkladu. Chtěli bychom vydělit $15 : 4$. Už víme, že výsledek můžeme zapsat zlomkem (zkuste si rozmyslet, že to nejde celým číslem). V čitateli bude jakoby počet věcí, které bychom rozdělovali (což je číslo 15), a ve jmenovateli bude jakoby počet lidí, mezi které rozdělujeme. To je číslo 4. Nezapomeneme oddělit čitatele a jmenovatele zlomkovou čarou, nakonec zapíšeme, že $15 : 4 = \frac{15}{4}$ (doplň zlomek). Přečteme to jako „patnáct čtvrtin“. Víme, že když náš zlomek vynásobíme čtyřmi, dostaneme 15, tedy $\frac{15}{4} \cdot 4 = 15$ (doplň ten stejný zlomek). Nakonec se pokusíme najít dvě celá čísla, mezi kterými se zlomek nachází. Kdybychom řekli, že $15 : 4 = 4$, bylo by to moc (málo/moc), protože $4 \cdot 4 > 15$. Kdybychom zase řekli, že $15 : 4 = 3$, bylo by to málo (málo/moc), protože $3 \cdot 4 < 15$. Takže můžeme říct, že náš zlomek je menší (větší/menší) než 4 a větší (větší/menší) než 3.

Teď se podíváme na některé zajímavé vlastnosti zlomků. Mohlo by nás třeba zajímat, jestli můžeme zlomky sčítat. Nejprve si vezmeme dva zlomky se stejným jmenovatelem. Třeba $\frac{7}{5}$ a $\frac{8}{5}$. Zkusíme si zase rozmyslet na rozdělování, jaký by mohl být jejich součet. Zlomek $\frac{7}{5}$ říká, že se mezi 5 lidí rozdělilo 7 jablek. Zlomek $\frac{8}{5}$ říká, že se mezi 5 lidí rozdělilo 8 jablek. Sčítání si tady představme tak, že jsem jeden z pěti lidí, nejdřív se mezi nás pět spravedlivě rozdělí 7 jablek a pak dalších 8. Zajímáme se o to, kolik jsem z obou rozdělení dohromady dostal jablek (nejprve dostanu $\frac{7}{5}$ a pak ještě $\frac{8}{5}$). Tím, že obě rozdělení proběhla spravedlivě (každý dostal stejně), můžeme říct, že celkem má každý stejně jablek (byť zatím nevíme kolik). Také ale víme, že dohromady bylo rozděleno 15 (doplň číslo) jablek. Dělili jsme vždy mezi 5 lidí a každý dostal celkově stejně,

tedy $\frac{15}{5}$ jablek. To bychom ale mohli vydělit, abychom dostali jednodušší výsledek! Takže bychom mohli říct, že každý dostal 3 (doplň celé číslo) jablka.

Obecněji si můžeme rozmyslet (a udělali bychom to úplně stejně jako v minulém příkladu), že když sčítáme dva zlomky se stejným jmenovatelem, stačí sečíst ty dva čitatele a jmenovatel se nezmění. Někdy se může stát, že se dá zlomek zjednodušit tím, že se na něj podíváme jako na dělení (což se právě stalo v minulém příkladu).

Problém ale nastane, pokud bychom chtěli sečíst dva zlomky s různými jmenovateli. Například $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$. Jak bychom vůbec něco takového mohli udělat? Opravdu by se nám hodilo, kdyby měly zlomky stejného jmenovatele, pak bychom je mohli sečíst podobně jako v minulém příkladu. Proto si něco řekneme o úpravě zvané rozšíření zlomku.

Můžeme se zkusit zaměřit na první zlomek, tedy $\frac{2}{3}$. Ten vyjadřuje, kolik dostane každý ze tří lidí, pokud mezi ně rozdělíme dvě jablka. Máme tedy dvě jablka a rozdělíme je mezi tři lidi. Pak si ale zavoláme další tři lidi a zase mezi ně rozdělíme nová dvě jablka. Teď si můžeme všimnout, že každý má stejně jablek, a to $\frac{2}{3}$. Když ale má všech šest lidí stejně, také bychom mohli říct, že jsme celkem spravedlivě rozdělili 4 (doplň číslo) jablka mezi 6 lidí, takže každý vlastně dostal $\frac{4}{6}$ (doplň čítele) jablek. Zjistili jsme, že hodnoty $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{6}$ jsou stejné. Neboli při dělení dvou jablek mezi tři lidi dostane každý z lidí stejně, jako když by se zúčastnil dělení 4 jablek mezi šest lidí. Můžeme tedy psát, že $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Tyto dva zlomky nám nepopisují stejný proces (jeden se týká dělení mezi tři lidi a druhý dělení mezi šest lidí), ale důležité je, že hodnota zlomku (tedy odměna pro jednoho člověka) je v obou děleních stejná.

Jak už jsem zmínil, úpravě, která nám umožňuje změnit čitatele i jmenovatele zlomku, aniž by došlo ke změně hodnoty zlomku, říkáme rozšíření. Ukážeme si to na ještě jednom příkladu. Máme

zlomek $\frac{4}{5}$ a chtěli bychom z něj udělat jiný zlomek se stejnou hodnotou, který bude mít ve jmenovateli 15. Máme 4 jablka a rozdělujeme je mezi 5 lidí. Každý dostane $\frac{4}{5}$ jablek. Vezmeme si tři takové pětičlenné skupiny a v každé rozdělíme rovnoměrně 4 jablka. Všech 15 lidí má stejně, a to $\frac{4}{5}$. Ale také víme, že jsme dohromady rozdělili 12 jablek mezi 15 lidí, takže každý má $\frac{12}{15}$ jablek. Takže $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$. Můžeme si rozmyslet, že jsme čitatele i jmenovatele vynásobili stejným číslem, a to počtem pětičlenných skupin. Tolikrát se totiž zvětšil počet lidí i počet rozdaných jablek.

Obecněji bychom mohli říct, že rozšíření zlomku je úprava, při které vynásobíme čitatele i jmenovatele stejným číslem (hodnota zlomku se nezmění). Stejně tak můžeme čitatele i jmenovatele vydělit stejným číslem, přičemž hodnota zlomku také zůstane stejná. Pokud třeba víme, že $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$ (rozšíření), můžeme stejně tak $\frac{7}{14}$ upravit na $\frac{1}{2}$ tím, že čítec i jmenovatel vydělíme sedmi (ke změně hodnoty zlomku nedošlo).

Nyní se můžeme vrátit k součtu $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$. Už víme, že $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, takže $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ (doplň čítec), protože zlomky se stejným jmenovatelem už sčítat umíme.

Nakonec se podíváme na násobení zlomků. Mohlo by se zdát, že násobit zlomek zlomkem nemůže mít výsledek – násobení je přece několikanásobné přičítání nějakého čísla k nule, takže když bychom chtěli násobit třeba $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3}$, znamená to, že přičteme $\frac{5}{3}$ k nule $\frac{4}{7}$ krát? Takhle na to asi jít nemůžeme, ale kdybychom násobili třeba $5 \cdot \frac{4}{7}$, můžeme úvahu o opakovaném sčítání použít. Napíšeme si to jako $\frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7}$, což zjednodušíme na $\frac{20}{7}$ (doplň výsledek), protože sčítat zlomky už umíme. Dva zlomky našťestí násobit můžeme, akorát na to musíme jít trochu jinak. S využitím toho, co o zlomcích už víme, si zkusíme odvodit, jak bychom je měli násobit.

Naším příkladem bude $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$. Zkusíme se na to podívat více matematicky, protože rozdělování jablek tady moc nedává smysl (jak bychom vůbec mohli násobit nějaké části jablek?). O zlomku $\frac{2}{5}$ víme, že když ho vynásobíme pěti, dostaneme dva. A o zlomku $\frac{7}{3}$ víme, že když ho vynásobíme 3 (doplň číslo), dostaneme 7 (doplň číslo).

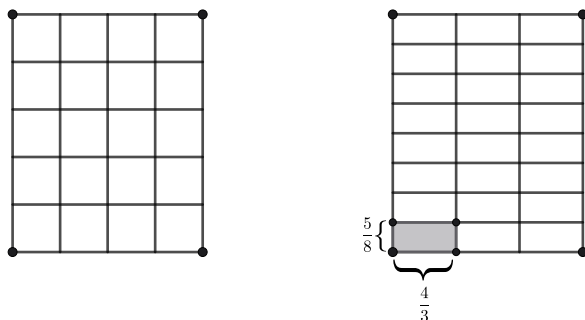
Tak dobře, abychom těchto dvou vlastností využili, zkusíme vynásobit $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$ pěti a poté ještě třemi (tedy vlastně patnácti). Dostaneme, že $\frac{2}{5} \cdot 5 \cdot \frac{7}{3} \cdot 3 = 2 \cdot 7 = 14$. Znamená to, že $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = 14$? To úplně ne. Nemůžeme jen tak vynásobit příklad nějakým číslem, to nám přece změní výsledek! Kdybychom měli $2 + 3$ a vynásobili ten příklad dvěma, dostaneme $4 + 6$, což má jiný výsledek, než když příklad nevynásobíme dvěma. Naštěstí jsme se i tak vydali správným směrem. My jsme příklad vynásobili patnácti, a když ho pak zase vydělíme patnácti, měl by být výsledek stejný jako v původním příkladu $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$. Už víme, že po vynásobení patnácti jsme dostali výsledek 14. Po vydělení patnácti tak dostaneme výsledek $14 : 15 = \frac{14}{15}$ (zapiš zlomkem). To je tedy výsledek $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$.

Zkusíme si to ještě jednou. Tentokrát ale trochu jinak. Budeme násobit zlomky $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{8}$ a podíváme se na to obrázkem. Připomeneme si, jak si můžeme nakreslit násobení celých čísel. Když máme $5 \cdot 6$, můžeme si nakreslit třeba čokoládu, která bude rozdělená na 5 čtverečků vodorovně a 6 svisle. Násobení jakožto opakované sčítání nám říká, kolik čtverečků má čokoláda. V našem případě je to 30.

Když budeme chtít násobit zlomky, můžeme udělat něco podobného. Chtěli bychom zjistit, kolik čtverečků má tabulka s rozměry $\frac{4}{3}$ čtverečku a $\frac{5}{8}$ čtverečku. Jak si to můžeme představit? Vraťme se k tomu, co jsme si o zlomcích řekli na začátku. Číslo $\frac{4}{3}$ popisuje dělení 4 věcí rovnoměrně mezi tři lidi, obecněji na tři části. Pokud si tedy představíme, že délku 4 čtverečků rozdělíme na 3 stejné části,

bude mít jedna část délku $\frac{4}{3}$ čtverečku. Stejně tak když si představíme délku pěti čtverečků rozdělenou na 8 stejných částí, bude mít každá část délku $\frac{5}{8}$ čtverečku. Pro násobení si tedy představíme tabulku 4×5 čtverečků (nalevo), kde délku 4 čtverečků rozdělíme na 3 části a délku 5 čtverečků rozdělíme na 8 částí (napravo). Stejně jako v případě násobení celých čísel by výsledek násobení měl určit, kolik čtverečků má zabarvená část tabulky (s rozměry $\frac{4}{3}$ čtverečku a $\frac{5}{8}$ čtverečku).

Tabulka nalevo a napravo je stejně velká, její „velikost“ je 20 čtverečků. Z obrázku napravo vidíme, že tabulka je rozdělena na 24 obdélníků, každý má stejné rozměry. Takže tabulku s 20 (doplň číslo) čtverečky jsme rozdělili na 24 (doplň číslo) stejných částí. Protože nás zajímá počet čtverečků v jednom obdélníku, je to vlastně analogie k tomu, kdybychom těch 20 čtverečků rozdělili spravedlivě mezi 24 lidí, tak aby každý dostal právě jeden obdélníček. Takže když to zapíšeme zlomkem, dostaneme $\frac{20}{24}$. To bychom mohli upravit krácením. Čitatele i jmenovatele můžeme vydělit čtyřmi, takže nakonec zjistíme, že $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{6}$ (doplň výsledek).



Příklad č. 5

V obou částech uveď postup řešení.

a) *Sečti zlomky $\frac{5}{6} + \frac{3}{10}$. Nejprve zkus oba zlomky rozšířit (ne nutně stejným číslem) tak, aby měly stejné jmenovatele. Až zlomky sečteš, zkus se zamyslet, jestli by nešlo výsledný zlomek vykrátit nějakým číslem.*

b) *Vynásob zlomky $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$. Můžeš využít jakýkoliv postup, který jsme si ukázali (nebo klidně i nějaký jiný). Pokud budeš chtít řešit pomocí čokoládové tabulky, nakresli ji prosím do svého řešení. Na závěr zkus zase přemýšlet, jestli bychom výsledný zlomek nemohli něčím vykrátit.*

Řešení: a) Zlomky $\frac{5}{6}$ a $\frac{3}{10}$ chceme rozšířit tak, aby měly stejného jmenovatele, a proto si najdeme jejich nejmenší společný násobek; tím je číslo 30. Chceme tedy, aby jmenovatel bylo číslo 30. První zlomek musíme rozšířit číslem 5 a druhý číslem 3. Takto nám vznikly úplně dva nové zlomky: $\frac{25}{30}$ a $\frac{9}{30}$. Tyto zlomky můžeme sečíst, jelikož mají stejného jmenovatele, a po sečtení vyjde zlomek $\frac{34}{30}$. Na závěr můžeme čitatele i jmenovatele vydělit číslem 2 a získáme $\frac{17}{15}$.

b) Po vynásobení zlomků tímto způsobem: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24}$, dostaneme výsledný zlomek. Tento zlomek lze zkrátit, jelikož jmenovatel i čítele mají stejného dělitele, kterým je číslo 3. Vydělíme proto čitatele i jmenovatele trojkou a vyjde $\frac{5}{8}$.

Úlohy páté série opravovali a komentáře sepsali: 1. Ludvík Steinhäuser, 2. Jana Malkovská, 3. Alžběta Reitmayerová a Robin Tesař, 4. František Steinhäuser, 5. Noel Probst