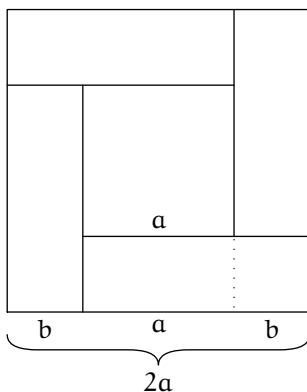


Vzorová řešení a komentáře k 5. sérii úloh

Úloha č. 1

Do skály jsou vytesány čtyři shodné obdélníky jako na obrázku 1. Obsah vnějšího čtverce je 4krát větší než obsah vnitřního čtverce. Jaký je poměr délky delší strany každého obdélníku k délce jeho kratší strany?

Řešení: Pokud víme, že obsah vnějšího čtverce je 4krát větší než obsah vnitřního čtverce, dokážeme odvodit poměr stran těchto čtverců. Obsah je vždy druhou mocninou strany, proto když je obsah 4krát větší, tak strana vnějšího čtverce je 2krát větší než strana vnitřního čtverce.

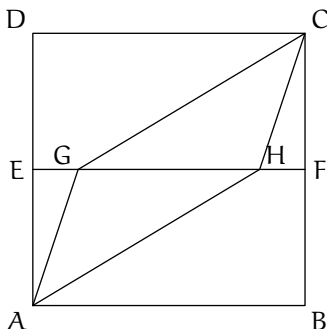


Obr. 1

Stranu menšího čtverce označíme jako a , tím pádem strana většího bude $2a$. Menší čtverec je uprostřed většího, protože na obou stranách jsou na výšku postavené obdélníky. Jejich kratší stranu pojmenujeme b . Z obrázku můžeme vidět, že $2a = b + a + b$. Díky tomuto zjištění můžeme říct, že $2b = a$ a obdélník má jednu stranu o délce b a druhou $a + b$. $a + b$ můžeme přepsat jako $3b$ a strany obdélníků jsou z tohoto důvodu v poměru $b : 3b$, neboli $1 : 3$.

Úloha č. 2

Ve Velké Británii jsme našli čtverec ABCD jako na obrázku 2 se stranou délky



Obr. 2

$|AB| = 12$. Body E a F jsou postupně středy stran AD a BC. Na úsečce EF leží postupně body G a H. Z bodů G a H jsou vedeny úsečky do vrcholů A a C tak, že tyto úsečky rozdělí čtverec na tři oblasti (AGCD, AHCG, ABCH) se stejným obsahem. Jakou délku má úsečka GH?

Řešení: Obsah čtverce je $12^2 = 144$. Každá ze tří oblastí má stejný obsah, tedy $144:3 = 48$. Oblast AHCG se skládá ze dvou trojúhelníků AHG a CHG se stejnou základnou GH. Jelikož jsou body E a F středy protějších stran čtverce, mají tyto trojúhelníky stejnou výšku a to $12:2 = 6$, a proto i stejný obsah. Dosadíme do vzorečku pro výpočet obsahu trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$:

$$48 = 2 \cdot \frac{|GH| \cdot 6}{2}$$

$$48 = 6 \cdot |GH|$$

$$|GH| = 8$$

Dostaneme, že délka úsečky GH je 8.

Komentář: Většina řešitelů došla ke správnému výsledku, ale velká část uvažovala $|EG| = |HF|$ bez zdůvodnění, za což jsme museli strhnout bod.

Úloha č. 3

Napište všechna kladná celá čísla menší než 2026, která se rovnají šestinásobku součtu svých číslic. Dobře zdůvodněte, proč to pro žádná další čísla neplatí.

Řešení: Hledaná čísla musí být násobkem 6, protože součet číslic celého čísla musí být celý. Jelikož nechceme prohledávat všechny násobky 6, takže si zjistíme

co je nejvyšší ciferný součet, co můžeme dostat do čísla 2026. Ten najdeme u čísla 1999, a je roven 28, takže nejvyšší číslo splňující podmínky bude $28 \times 6 = 168$. Zbývá nám tedy už jen pouhých 27 možností, které buď můžeme prohledat ručně, nebo si sestavit soustavu rovnic abychom našli řešení bez zkoušení. a je číslice na místě jednotek, b je číslice na místě desítek a c číslice na místě stovek. Pro jednociferné čísla máme následující rovnici:

$$a = 6 \times a$$

Tato rovnice vyjde pouze pokud $a = 0$ a jelikož víme, že a je kladné číslo, tak nemůže být 0

Pojďme si tedy sestavit rovnici pro dvouciferná čísla, která bude vypadat takto:

$$10b + a = 6 \times (a + b)$$

Po upravení nám vyjde

$$4b = 5a$$

jelikož a i b jsou cifry, tak jediný způsob jak může rovnice vyjít je

$$b = 5, a = 4$$

takže 54 je jediný možný výsledek v dvouciferných číslech. Uděláme to stejně pro trojciferná čísla:

$$100c + 10b + a = 6 \times (a + b + c)$$

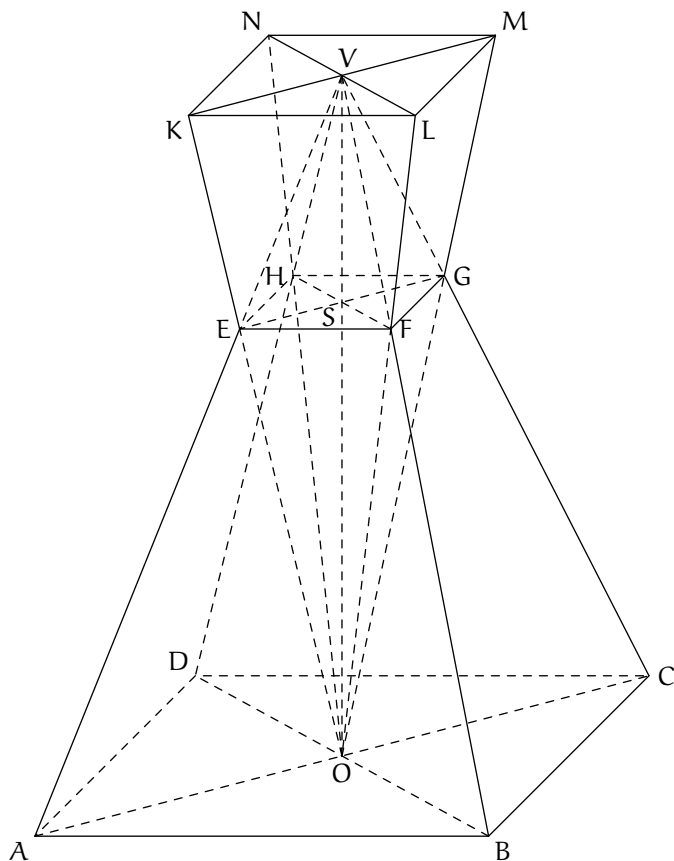
po úpravě nám vyjde

$$94c + 4b = 5a$$

jelikož nejmenší co může neznámá být je 1, tak z levé strany dostaneme nejméně 98 a z pravé nejvíce 45. Toto ale není ekvivalentní, a tak to není žádné trojciferné číslo. Proto jediné řešení této úlohy je 54.

Úloha č. 4

Na obrázku jsou do sebe zaklesnuté dva pravidelné čtyřboké jehľany. První jehľan má hranu podstavy délky 1 cm, druhý jehľan má hranu podstavy délky 2 cm. Oba jehľany mají výšku 3 cm a jejich hlavní vrcholy jsou uprostřed podstavy druhého jehľanu. Jehľany nejsou oproti sobě natočené, přední hrany podstav jsou rovnoběžné. Určete objem průniku těchto dvou jehľanů.

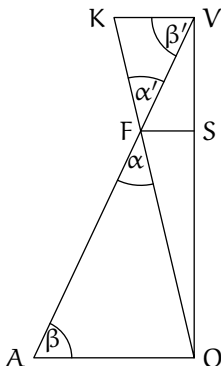


Obr. 3

Řešení:

Můžeme si povšimnout, že průnikem jehlanů jsou dva menší čtyřboké jehlany, které mají podstavu v místě průniku, tedy EFGH. Pokusíme se obsah této podstavy zjistit. Začneme tím, že uděláme oběma jehlany řez po úhlopříčkách jejich podstav. Tím získáme schéma jako na obrázku 4.

Délka úsečky AO bude polovina úhlopříčky čtverce ABCD, tedy $\sqrt{2}$. Délka KV bude poloviční, tedy $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Můžeme si povšimnout, že trojúhelníky AOE a KVE si jsou podobné, jelikož mají stejné dva úhly: α , α' (úhly vrcholové) a β , β' (úhly



Obr. 4

střídavě). Jelikož jejich strany jsou v poměru 1 : 2, jejich výšky, které reprezentují úsečky VS a SO, budou ve stejném poměru. Jelikož $|VO| = 3$ cm (výška obou jehlanů), platí, že $|VS| = 1$ cm a $|SO| = 2$ cm. Nyní dopočítáme velikost úsečky ES. Zcela určitě platí, že trojúhelníky OVK a OSE si jsou podobné. Jelikož $|OV| = 3$ cm a $|SO| = 2$ cm, poměr velikostí stran těchto dvou trojúhelníků je 3 : 2. Z toho vyplývá, že $|ES| = \frac{2}{3}|VK| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Nyní nám zbývá učinit už jen poslední krok k tomu, abychom zjistili obsah podstavy jehlanů, které tvoří průnik, tedy EFGH. Úsečka ES tvoří polovinu úhlopříčky této podstavy, její obsah bude tedy:

$$A = (2 \times |ES| \times \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = (2 \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{4}{9} \text{ cm}^2.$$

Obsah obou jehlanů tvořící průnik bude:

$$P = \frac{1}{3} A \times |VS| + \frac{1}{3} \times |SO| = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \times 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \times 2 = \frac{4}{9} \text{ cm}^3.$$

Komentář: Pro řešení této úlohy bylo důležité správně provést řez jehlany. Musíme také dbát na to, abychom při řešení úlohy a projekci do náčrtku správně označili délky stran.

Úloha č. 5

Deset tesaříků sedí v řadě na deseti listech, co list to tesařík. V jeden moment každý z tesaříků přeleze na nějaký ze sousedních listů nebo zůstane na svém původním

místě. Kolika způsoby to mohou udělat, aby na každém listě byl opět právě jeden tesařík?

Řešení: Úlohu zkusíme vyřešit nejdříve pro nižší počet tesaříků. Pokud máme v řadě právě jednoho tesaříka, má právě jednu možnost – zůstat na místě. Pokud máme dva tesaříky, možností také příliš nemají – buď oba zůstanou na místě, nebo se prohodí. Úloha začíná být zajímavá od třech tesaříků výše. Představme si, že jsme třetího tesaříka posadili na konec řady. Má opět dvě možnosti, co může udělat – zůstat na místě, anebo se prohodit s tesaříkem vedle sebe. Pokud zůstane na místě, tak už víme, kolik možností mají zbylí dva tesaříci, protože toto číslo jsme spočítali v předchozím kroku – budou mít 2 možnosti. Nicméně, pokud se třetí tesařík prohodí s druhým, první tesařík už může jen zůstat na místě, má tedy jen jednu možnost.

Označme f funkci, která nám pro počet tesaříků vrátí počet možností, jak se mohou prohodit. Poté jsme pro 3 tesaříky přišli na tento vztah:

$$f(3) = f(2) + f(1)$$

$$f(3) = 2 + 1 = 3$$

Po přidání čtvrtého tesaříka víme, že opět může zůstat na místě, a tak bude mít $f(3)$ možností, anebo se prohodí se třetím tesaříkem. V řadě tak zbydou dva tesaříci (první a druhý), kteří mají $f(2)$ možností. Bude tedy platit vztah:

$$f(4) = f(3) + f(2)$$

$$f(4) = 3 + 2 = 5$$

Definici si můžeme zobecnit pro jakékoliv $x > 2$:

$$f(x) = f(x-1) + f(x-2)$$

Abychom zjistili $f(10)$, stačí nám pouze do funkce opakovaně dosazovat, a přijdeme na to, že $f(10) = 89$. Nicméně ti pozorní z vás si určitě všimli, že předpis funkce f je skoro stejný jako předpis **Fibonacciho posloupnosti**. Nicméně, přímo o tuto posloupnost se nejedná, protože pro naši funkci platí, že $f(1) = 1$ a $f(2) = 2$, zatímco u Fibonacciho posloupnosti platí $f_{\text{fib}}(1) = 1$ a $f_{\text{fib}}(2) = 1$.

Úloha č. 6

Na vrcholu Mount Everestu je lichoběžník ABCD takový, že $AD \parallel BC$, $|BD| = 1$, $|\sphericalangle DBA| = 23^\circ$ a $|\sphericalangle BDC| = 46^\circ$. Navíc platí poměr $|BC| : |AD| = 9 : 5$. Jaká je délka strany CD? Výsledek podložte výpočty.

Řešení: Nejdříve si prodloužíme přímky BA a CD tak, aby vznikl průsečík, který si označíme E (viz obrázek). Ze zadání, víme, že úsečky AD a CB jsou rovnoběžné, a že $|BC| : |AD| = 9x : 5x$. Protože jsou úsečky AD a CB rovnoběžné, tak jsou trojúhelníky ADE a BCD podobné a tedy platí rovnost $\frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|ED|}{|DA|}$. Dále víme, že $|EC| = |ED| + |DC|$.

Úhly CBD a BDA jsou střídavé, a jejich velikost si označíme α , úhly BCD a ADE jsou souhlasné a jejich velikost si označíme β .

Následně platí, že $\alpha + \beta = 134$. Úhly CBA a DAE jsou také souhlasné a jejich velikost je $23^\circ + \alpha$.

Z těchto rovností nám vznikne následující rovnice:

$$|\sphericalangle AED| = 180^\circ - \alpha - 23^\circ - \beta$$

$$|\sphericalangle AED| = 180^\circ - 134^\circ - 23^\circ$$

$$|\sphericalangle AED| = 23^\circ$$

Z tohoto vyplývá, že trojúhelník BDE je rovnoramenný, a tedy platí $|BD| = |ED| = 1$.

Následně do rovnosti $\frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|ED|}{|DA|}$ dosadíme poměr $|BC| : |AD| = 9x : 5x$ a rovnost $|EC| = |ED| + |DC|$ a dosadíme $|ED| = 1$:

$$\frac{1 + |DC|}{9x} = \frac{1}{5x}$$

$$5 + 5 \times |DC| = 9$$

$$|DC| = \frac{4}{5}$$

Délka strany DC tedy je $\frac{4}{5}$.

Komentář: Tato úloha byla poměrně obtížná, a to z důvodu, že se velké množství řešitelů rozhodlo úlohu řešit pomocí goniometrie, což mělo za následek vysoký výskyt početních chyb.

Úloha č. 7

Na dně Bajkalu jsme objevili tři reálná nezáporná čísla a, b, c , která splňují vztahy

$$b = \frac{2a^2}{1 + a^2}, \quad c = \frac{2b^2}{1 + b^2}, \quad a = \frac{2c^2}{1 + c^2}.$$

Určete všechny možné trojice čísel a, b, c . Zdůvodněte, proč neexistují žádné další vyhovující trojice.

Řešení: Pokud se jedno z čísel a, b, c rovná nule, pak musí platit $a = 0, b = 0, c = 0$, a tato trojice splňuje všechny tři vztahy. Máme tedy první řešení, a pro zbytek úlohy můžeme předpokládat, že a, b, c jsou kladná.

Dokažme, že každé reálné číslo x platí $x^2 + 1 \geq 2x$ s rovností právě když $x = 1$: $0 \leq (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ s rovností právě když $x - 1 = 0$, úpravami dostaneme dokazovanou nerovnost.

Úpravou prvního vztahu a použitím této nerovnosti získáme $2a^2 = b(1 + a^2) \geq 2ab$ s rovností právě když $a = 1$. Z předpokladu $a > 0$ plyne $a \geq b$. Obdobně z druhého vztahu platí $b \geq c$ s rovností právě když $b = 1$ a ze třetího vztahu $c \geq a$ s rovností právě když $c = 1$. Díky tomu, že $a, b, c > 0$, můžeme nerovnosti vynásobit. Tím zjistíme, že pro všechna řešení $a, b, c > 0$ platí $abc \geq abc$ s rovností právě když $a = b = c = 1$. Rovnost ale zřejmě platí, takže jediné možné řešení může být právě $a = b = c = 1$. Dosazením ověříme, že tato trojice skutečně splňuje všechny vztahy, takže řešeními úlohy jsou $0, 0, 0$ a $1, 1, 1$.

Alternativní řešení: Vztahy můžeme zapsat jako $b = f(a), c = f(b)$ a $a = f(c)$, pro funkci $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$ z nezáporných reálných čísel do reálných čísel.

Tuto funkci můžeme upravit na $f(x) = 2 - \frac{2}{1+x^2}$. Na nezáporných reálných číslech je $1 + x^2$ rostoucí, takže $\frac{2}{1+x^2}$ je klesající a f je opět rostoucí.

Všimněme si, že pokud nahradíme a za b , b za c a c za a , platnost vztahů se nezmění. Díky tomu můžeme předpokládat, že $a \geq b$ a $a \geq c$: pokud je největší b nebo c , můžeme provést toto nahrazení a nebo opačné nahrazení, tedy a za c , c za b a b za a . (Pozor: Nemůžeme předpokládat $a \geq b \geq c$ – na to bychom potřebovali prohodit a s b při zachování c , což může změnit vztahy v zadání.)

f je rostoucí, takže z $a \geq c$ plyne $f(a) \geq f(c)$, tedy $b \geq a$. Zároveň $a \geq b$, takže $a = b$. Díky tomu i $f(a) = f(b)$, tedy $b = c$. Dohromady jsme dokázali, že pro každé řešení musí platit $a = b = c$.

Dosazením do prvního vztahu a upravováním,

$$\begin{aligned} a &= \frac{2a^2}{1+a^2} \\ (1+a^2)a &= 2a^2 \\ (1-2a+a^2)a &= 0 \end{aligned}$$

takže řešeními jsou právě $a = b = c = 0$ a $a = b = c = 1$.

Komentář: Tato úloha byla velmi těžká, což se projevilo jak na počtu odevzdaných řešení tak na bodových ohodnoceních – byla důkazová a při řešení bylo jednoduché udělat chyby. Proto chválím všechny řešitele, kteří se o ni alespoň pokusili.

Úlohy páté série opravovali a komentáře sepsali: 1. Luisa Troupová, 2. Matyáš Hazdra, 3. Vojtěch „Kanec“ Kadlec, 4. Adam Dřínek, 5. Vojtěch „Kanec“ Kadlec a Adam Dřínek, 6. Vít „Sičák“ Houfek, 7. Tomáš Flídr