

Vzorová řešení a komentáře k 6. sérii úloh

Úloha č. 1

Koko se rozhodla, že si čekání na příjezd kolonizátorů zkrátí hrou. Vzala si klasickou šestistěnnou hrací kostku a třikrát náhodně vybrala nějakou stěnu a smazala z ní jeden puntík. Celkem tedy smazala tři puntíky. Jaká hodnota jí bude průměrně padat při hodech touto kostkou?

Řešení: Nejdříve se pojďme podívat, jak zjistíme hodnotu průměrného hodu kostky. Toto zjistíme aritmetickým průměrem všech puntíků na naší kostce. Aritmetický průměr se počítá jako celkový počet puntíků dělený počtem stěn. Pro normální kostku to vypadá jako

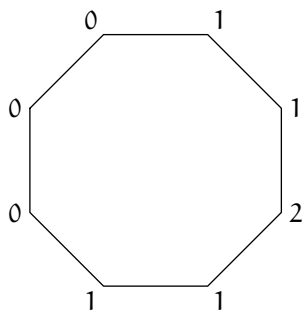
$$\frac{\text{celkový počet puntíků}}{\text{počet stran}}$$

Když toto víme, tak se můžeme vrhnout na spočítání případu pro Koko. Víme, že třikrát smazala jeden puntík, tím pádem dohromady puntíky smazala tři. Toto musíme přidat do našeho počtu celkových puntíků a budeme mít výsledek:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 3}{6} = 3$$

Takže Koko bude průměrně padat hodnota 3.

Úloha č. 2

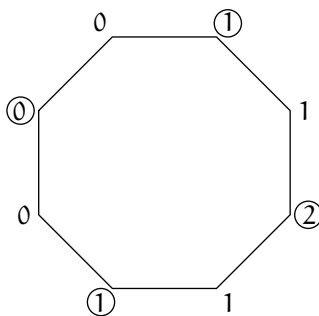


Obr. 1

Noel má pravidelný osmiúhelník s čísly napsanými na vrcholech jako na obrázku 1. Noel je perfekcionista a chce mít na každém vrcholu stejné číslo. Jediný způsob, jakým může Noel změnit čísla na vrcholech, je, že vybere dva sousední vrcholy a k oběma přičte jedničku. Může se to Noelovi povést? Dobře odůvodněte svůj výsledek, proč se mu to může, či nemůže povést.

Řešení: Když budeme náhodně přidávat $+1$ k vrcholům, tak brzy zjistíme, že ať se snažíme, jak chceme, tak se nám to nepodaří. Teď ale potřebujeme přijít na to proč.

Pokud chceme přidat k nějakému vrcholu, tak musíme přidat k nějakému ze sousedů. Vždy tedy přidáváme po dvojicích. Pokud chceme přidat třeba $+2$ k nějakému vrcholu, můžeme buď do vedlejších přidat $+1$, nebo do jednoho vedlejšího přidat $+2$. Tímto můžeme říct, že vždy když přidáme $+1$, tak přidáváme do dvou skupin vrcholů, které se střídají jako na obrázku 2.



Obr. 2

Kdykoliv chceme přidat $+1$ do zakroužkovaného vrcholu, tak musíme zároveň přidat $+1$ do nezakroužkovaného vrcholu. Díky tomuto si můžeme spočítat, kolik je součet zakroužkovaných vrcholů a kolik je součet ostatních vrcholů. Po spočítání nám vyjde, že na zakroužkovaných vrcholech je součet 4, zatímco na nezakroužkovaných pouze 2.

Toto znamená, že ať už budeme přičítat k vrcholům jakkoli, vždy bude na našich zakroužkovaných vrcholech o 2 vyšší součet než na nezakroužkovaných, takže nemůžeme mít na všech vrcholech stejné číslo.

Úloha č. 3

Jack a James hrají hru. Jack si vezme kartičky s čísly 3, 5, 6, 7 a 9 a tajně si je

v nějakém pořadí označí písmeny a, b, c, d, e . Poté si na papír napíše výsledky následujících pěti součtů: $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$, $e+a$. Jack poté Jamesovi prozradí, že když si výsledky na papíře seřadí podle velikosti, budou tvořit aritmetickou posloupnost. Pomozte Jamesovi určit hodnotu prostředního členu oné aritmetické posloupnosti.

Řešení: Tuto úlohu budeme řešit přes aritmetický průměr. Nejprve sečteme pět daných součtů a upravíme výraz.

$$(a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+e) + (e+a) = 2 \times (a+b+c+d+e)$$

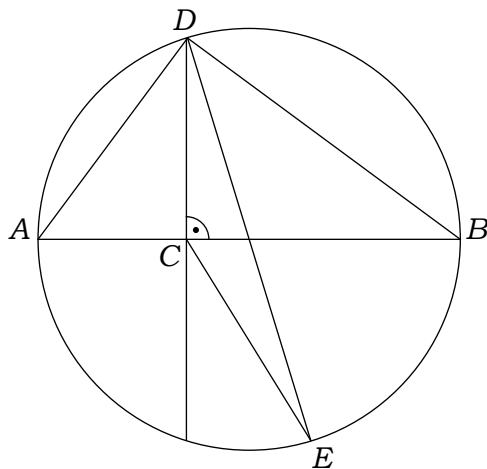
Dosadíme čísla ze zadání, nezáleží v jakém pořadí.

$$2 \times (3+5+6+7+9) = 60$$

My musíme nalézt prostřední člen aritmetické posloupnosti a to je v tomto případě průměr. Proto vydělíme součet všech členů počtem členů.

$$60 \div 5 = 12$$

Zjistili jsme, že prostřední člen této aritmetické posloupnosti je 12.

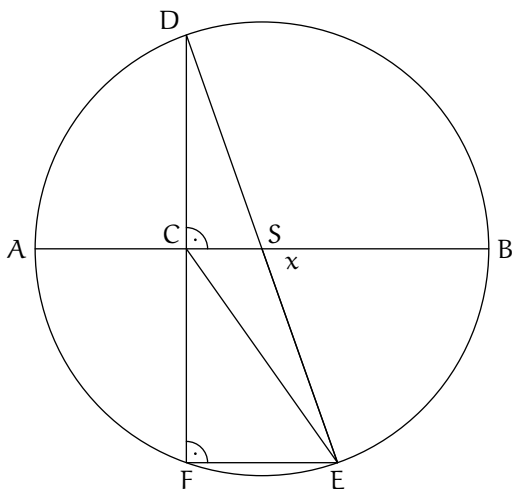


Obr. 3

Úloha č. 4

Kanaďany už přestalo bavit mít na vlajce javorový list, a tak se rozhodli pro více abstraktní obrazec 3. Sestaví se tak, že narýsujete doprostřed vlajky kružnici k . Na té si vyznačíte protilehlé body A a B , které spojíte a vyznačíte tak průměr kružnice k . Dále si vyznačíte bod C ležící na úsečce AB tak, že platí $2|AC| = |CB|$. Nakonec si vyznačíte body D a E tak, že D leží na jednom z průsečíků kolmice na AB v bodě C s kružnicí k a DE je průměr kružnice k . Jaký je poměr obsahu trojúhelníku CDE k trojúhelníku ABD ?

Řešení:



Obr. 4

Do obrázku, který máme v zadání, si vyznačíme dva další body: S je střed kružnice k a F se nachází v druhém bodě, kde kolmice na AB protíná kružnici k . Označme x průměr kružnice k .

Je zřejmé, že jelikož DE je průměr k , pak stejně jako AB prochází středem kružnice S . Nyní sestrojíme přímku EF , čímž vytvoříme trojúhelník DFE . Jelikož tento trojúhelník je podobný trojúhelníku CSD (dvakrát jsme prodloužili jeho strany CD a SD), přímka EF musí být rovnoběžná s přímkou AB a u F je pravý úhel.

Ze zadání platí, že $|AC| = \frac{1}{3}x$. Jelikož $|AS| = \frac{1}{2}x$, platí, že $|CS| = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{6}x$. Strana FE trojúhelníku DFE musí tedy být dvakrát tak dlouhá, tedy $|FE| = \frac{1}{3}x$.

Tato strana je také výškou trojúhelníku CDE, jeho obsah S_1 je tedy $\frac{|CD| \cdot |FE|}{2} = \frac{|CD|}{2} \cdot \frac{x}{3}$. Dále můžeme spočítat, že obsah S_2 trojúhelníku ABD je $\frac{|AB| \cdot |CD|}{2} = \frac{x \cdot |CD|}{2}$. Náš hledaný poměr je:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{|CD|}{2} \cdot \frac{x}{3}}{\frac{x \cdot |CD|}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Komentář: Úloha šla řešit různými způsoby, jelikož v kružnici je spousta různých symetrií, které šlo využít. Při řešení bylo možné dokonce dopočítat přesnou velikost výšky CD, což nicméně k řešení není nutné. Většina řešitelů za úlohu získala plný počet bodů.

Úloha č. 5

Tři kamarádi, Maty, Štěpán a Dan, si hodili kostkou a každý se podíval jen na svoje číslo. Poté přišla Luisa a zeptala se jich: „hodili jste dohromady alespoň 15?“ Maty odpověděl „nevim“ a Štěpán pak totéž. Dan na to ale zareagoval, že určitě hodili alespoň 12. Po této informaci Maty zase odpověděl, že neví, a to stejné odpověděl i Štěpán, a Maty znovu dodal, že stále neví. Když to však dořekl, Štěpán nadšeně vykřikl, že se jim podařilo hodit alespoň 15. Kolik kdo hodil, pokud všichni říkali pravdu?

Řešení: Maty, Štěpán i Dan mohli hodit 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6. Po zeptání se otázky Maty odpoví, že neví, jestli dokázali hodit alespoň 15. To znamená, že nemohl hodit 1 ani 2. Kdyby hodil 1 nebo 2, tak ať už Štěpán a Dan hodili cokoliv, součet nemůže být alespoň 15 ($2 + 6 + 6 = 14$). To stejné platí i pro Štěpána, když řekl, že neví, jestli dokázali hodit alespoň 15. Dan řekl, že hodili alespoň 12, tedy musel hodit 6, jelikož neví, co hodili Maty a Štěpán; nejmenší, co mohli hodit, jsou dvě trojky. Dohromady tedy hodili alespoň 12.

Po této informaci Maty nevěděl, jestli hodili alespoň 15, to znamená, že nehodil 6, jelikož by hned věděl, že je možné hodit alespoň 15, ať už by Štěpán hodil cokoliv. Štěpán mu na to odpověděl, že opět neví, to tedy uvozuje, že nehodil 3, jelikož by hned řekl, že nehodili alespoň 15, ale také nehodil 6, jelikož by hned řekl, že hodili alespoň 15.

Maty opět neví, tedy nehodil 3, protože by řekl, že to není možné. Nehodil ani 5, protože by řekl, že je to možné, jelikož Štěpán hodil 4 nebo 5 a oboje dává součet alespoň 15. Nakonec Štěpán řekl, že hodili alespoň 15, musel tedy hodit přesně číslo 5, jelikož ví, že Dan hodil 6 a Maty 4.

Úloha č. 6

Na tabuli jsou napsána po řadě čísla 0 1 2 3 ... 19. George a Charles mají fixu a hrají následující hru. Hráč na tahu vybere dvě po sobě jdoucí čísla, mezi kterými zatím není nic napsáno, a napíše mezi ně buďto mínus, nebo plus. Oba hráči se střídají v tazích, Charles začíná. Cíl Charlese je, aby výsledek dával po dělení třemi zbytek 0 (což je například -3 , -12 nebo 21). Cíl George je, aby výsledek dělit třemi beze zbytku nešlo. Oba z nich hrají nejlépe, co to jde. Kdo z nich má vyhrávající strategii? Tuto strategii dobře popište.

Řešení: Oba hráči odehrají dohromady 19 tahů. Charles jich přitom odehraje 10 a George 9. Přitom George má vyhrávající strategii. Georgův cíl je, aby po každém jeho tahu byl celkový zbytek po dělení třemi u čísel, u kterých je znaménko již napsané, vždy 0. Vzhledem k tomu, že poslední tah má Charles, Georgovi bude stačit, aby poslední číslo na tabuli nebylo dělitelné třemi. Nyní stačí ukázat, že se mu to může podařit. Máme dohromady 6 čísel, která jsou dělitelná třemi beze zbytku, 7 čísel dávajících zbytek 1 a 6 čísel dávajících zbytek 2 po dělení třemi.

Pokud Charles dá ve svém tahu znaménko před číslo dělitelné třemi, dá George v následujícím tahu libovolné znaménko před jiné číslo dělitelné třemi. Vzhledem k tomu, že jich je sudý počet, nemůže nastat situace, aby na George už takové číslo nezbylo.

Pokud Charles umístí znaménko před číslo dávající zbytek 1, umístí George shodné znaménko před číslo dávající zbytek 2. Tím zaručí, že součet posledních dvou zahrnutých čísel musí být dělitelný třemi.

Pokud Charles umístí znaménko před číslo dávající zbytek 2, umístí George shodné znaménko před číslo dávající zbytek 1. Tím opět zaručí dělitelnost třemi.

Vzhledem k tomu, že čísel dávajících zbytek 1 je o jedna více než těch, co dávají zbytek 2, nastane ve hře situace, kdy George nemůže hrát podle výše uvedeného schématu. To se stane přesně poté, co George umístí 6krát znaménko před číslo nedělitelné třemi (tedy číslo dávající zbytek 1 nebo 2). V tuto chvíli už ale zbývá pouze jedno číslo dávající zbytek 1 a nějaké množství čísel dělitelných třemi. Čísla dělitelná třemi už dělitelnost neovlivní. V nějakou situaci ale některý z hráčů bude muset umístit znaménko před poslední číslo dávající zbytek 1, čímž celkový součet udělá nedělitelný třemi. George tedy skutečně vždy vyhraje.

Úloha č. 7

Booneovi psi kamarádi na oslavu upekli obdélníkový koláč. Chtěli by koláč rozřezat na obdélníkové dílky pomocí rovných řezů vždy přes celý koláč (nelze ko-

lác řezat na patra, na to je moc placatý). Přitom Boone dostane všechny vnitřní dílky, zatímco jeho kamarádi si mezi sebe rozdělí dílky, co jsou na okraji koláče. Každý pes nakonec dostal stejný počet dílků (jak Boone, tak jeho kamarádi). Určete všechny možnosti, kolik psů se o dort mohlo takto spravedlivě podělit. Pro každou velikost skupiny určete jedno rozkrájení koláče (počet svislých a počet vodorovných řezů). Ukažte, proč pro jiné velikosti skupiny vhodné rozkrájení koláče neexistuje.

Řešení: Označme si strany koláče jako a, b . Poté počet dílků pro Booneho můžeme zapsat jako $(a - 2)(b - 2)$ a pro jeho kamarády jako $2a + 2b - 4$. Víme, že $(a - 2)(b - 2) \leq 2a + 2b - 4$, protože kamarádi mají dohromady k násobek počtu Booneho dílků.

Po úpravě naší předchozí nerovnice dostaneme:

$$(a - 2)(b - 2) \leq 2a + 2b - 4$$

$$ab - 2b - 2a + 4 \leq 2a + 2b - 4$$

$$ab \leq 4(a + b - 2)$$

Z nerovnice lze vyčíst, že alespoň jedno z čísel a, b musí být ≤ 6 , protože pokud jsou obě čísla větší než šest, nerovnice nemůže nikdy platit.

Řekněme, že a je to menší z čísel: $a \leq b$. Víme, že $a \leq 6$. Nyní nám zbývá vyřešit rovnici $k(a - 2)(b - 2) = 2a + 2b - 4$ pro všechna možná přirozená a větší než 2 (pokud $a \leq 2$, pak Boone nemá kamarády).

a) $a = 3$

Poté Boone má $b - 2$ dílků, kamarádi mají $2b + 2$. Víme, že nejmenší počet Boonevých kamarádů je $k = 3$, jelikož koláč má tvar obdélníku se třemi řádky. Prostřední řádek bez krajních dílků je Booneho, zbytek je pro kamarády. Ti mají celé dva řádky a k tomu krajní kousky, takže kamarádů musí být víc než dva tzn. minimálně tři. Zároveň ale kamarádů nemůže být víc než 8, protože se 6 kamarádů musí podělit o krajní kousky a každý kamarád přitom musí dostat aspoň jeden kousek. Po vyzkoušení možností splňujících $b \geq 3$ a $3 \leq k \leq 8$ získáme možná rozdělení koláče: $(a = 3, b = 3, k = 8)$, $(a = 3, b = 4, k = 5)$, $(a = 3, b = 5, k = 4)$, $(a = 3, b = 8, k = 3)$.

b) $a = 4$

Poté Boone má $2b - 4$ dílků, kamarádi mají $2b + 4$. Víme, že nejmenší počet Boonevých kamarádů je $k = 2$, jelikož Boone má dva řádky bez krajních dílků a kamarádi mají dva řádky s krajními dílky, tzn. musí mít víc než jednoho kamaráda. Aby na každého kamaráda vyšel nějaký kousek, nemůže být kamarádů víc než 9.

Po vyzkoušení možností splňujících $b \geq 4$ a $2 \leq k \leq 9$ získáme možná

rozdělení koláče: $(a = 4, b = 4, k = 3), (a = 4, b = 6, k = 2)$.

c) $a = 5$

Poté Boone má $3b - 6$ dílků, kamarádi mají $2b + 6$. Víme, že nejmenší počet Boonevých kamarádů je $k = 1$, jelikož existující obdélník má vždy nějaký obvod. Horní omezení na počet kamarádů je tentokrát 11.

Po vyzkoušení možností splňujících $b \geq 5$ a $1 \leq k \leq 11$ získáme možná rozdělení koláče: $(a = 5, b = 12, k = 1)$.

d) $a = 6$

Boone má $4b - 8$ dílků, kamarádi mají $2b + 8$. Víme, že nejmenší počet Boonevých kamarádů je $k = 1$, jelikož existující obdélník má vždy nějaký obvod. Největší možný počet kamarádů je 13.

Po vyzkoušení možností splňujících $b \geq 6$ a $1 \leq k \leq 13$ získáme možná rozdělení koláče: $(a = 6, b = 8, k = 1)$.

Jedná se o všechna možná rozdělení koláče.

Úlohy šesté série opravovali a komentáře sepsali: 1. Vojtěch „Kanec“ Kadlec
2. Vojtěch „Kanec“ Kadlec, 3. Luisa Troupová, 4. Adam Dřínek, 5. Noel Probst,
6. Lukáš „Krték“ Koucký, 7. Robin Tesař a Eliška Vimmerová